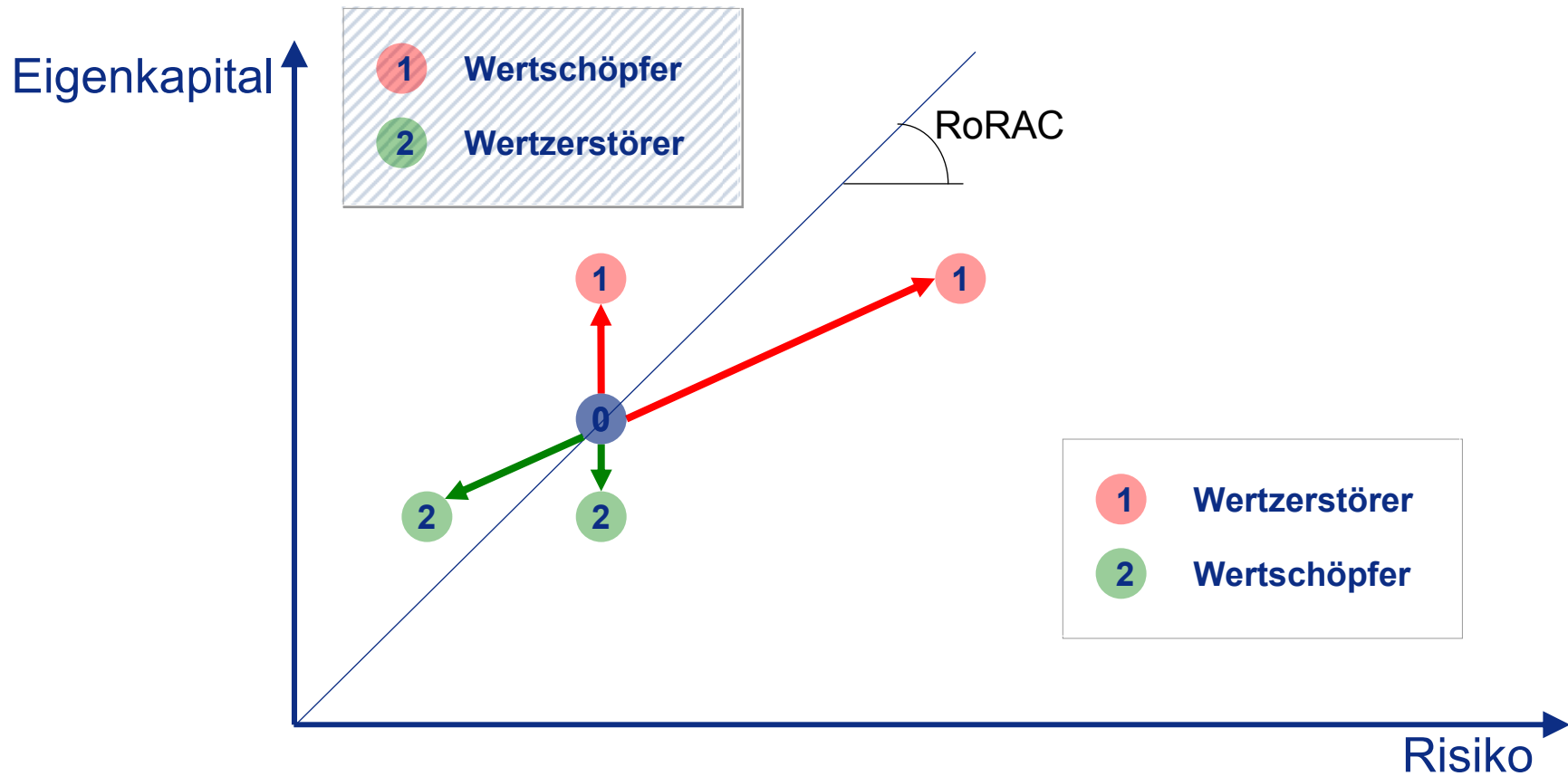


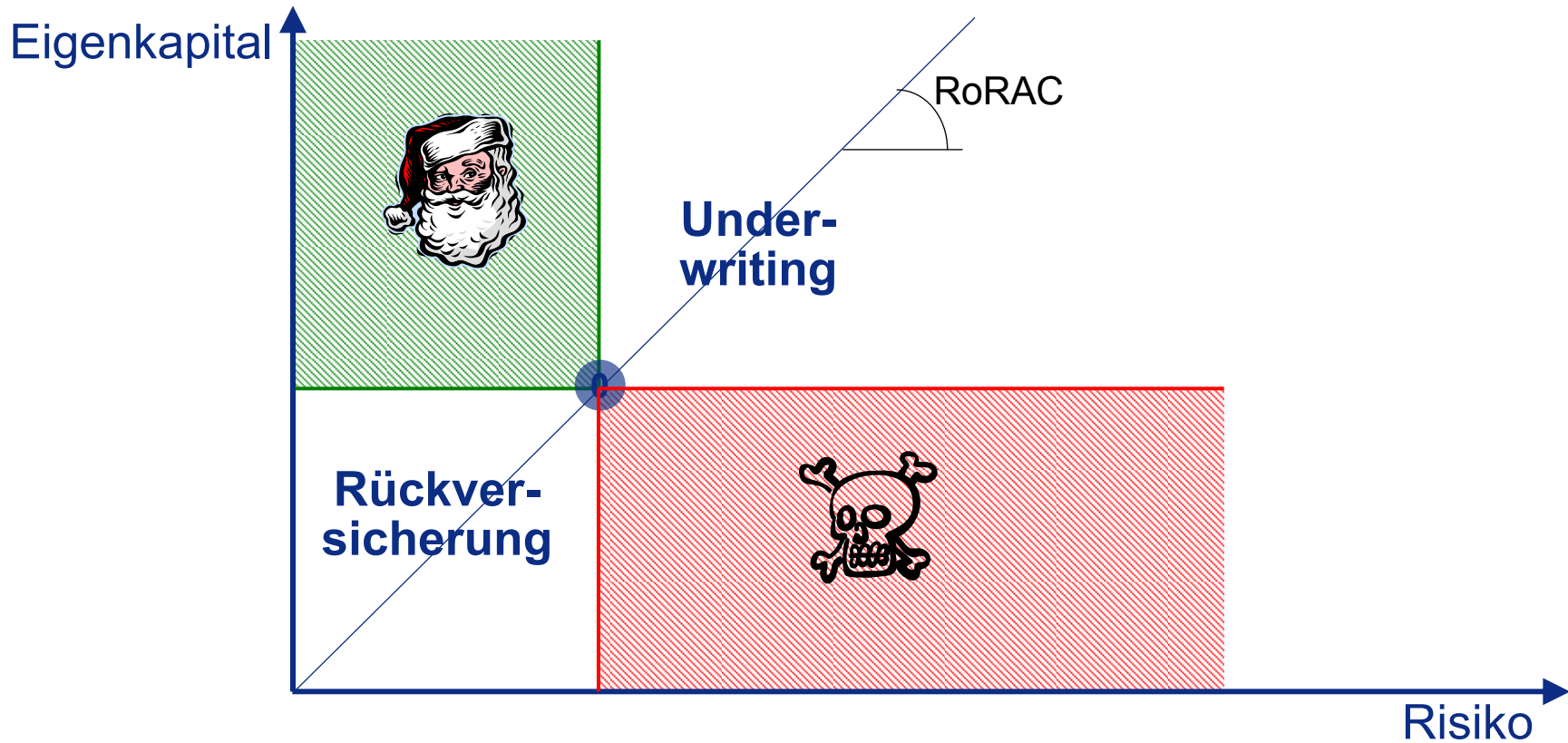
Rückversicherung: Vertragsarten und deren Prämienberechnung

20 Januar 2008
Frank Cuypers

Das Geschäftsmodell der Rückversicherung



Das Geschäftsmodell der Rückversicherung

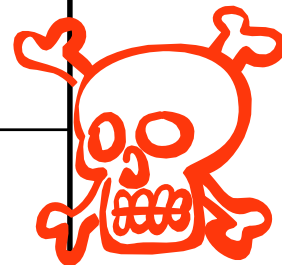
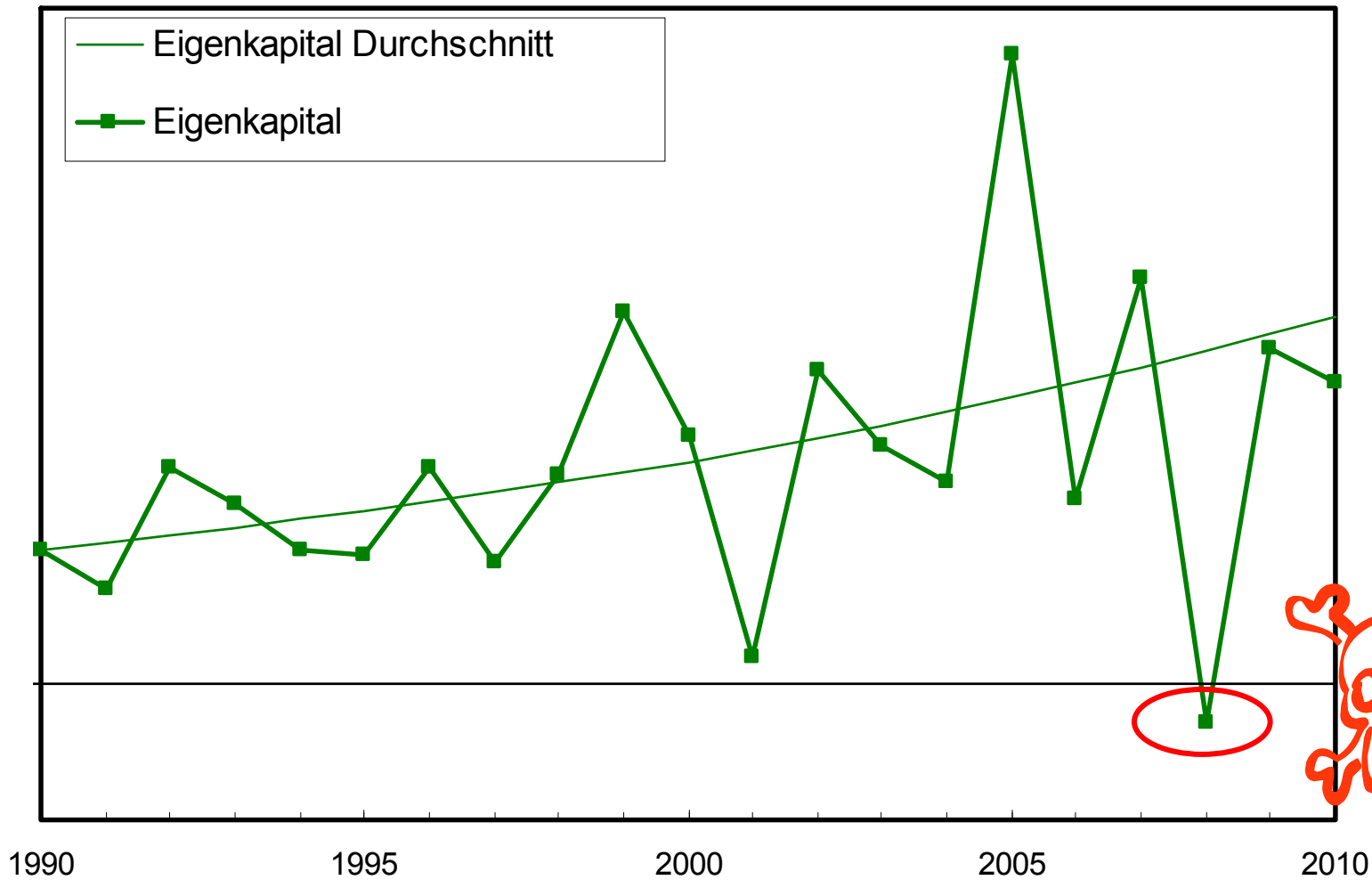


Warum Rückversicherung?

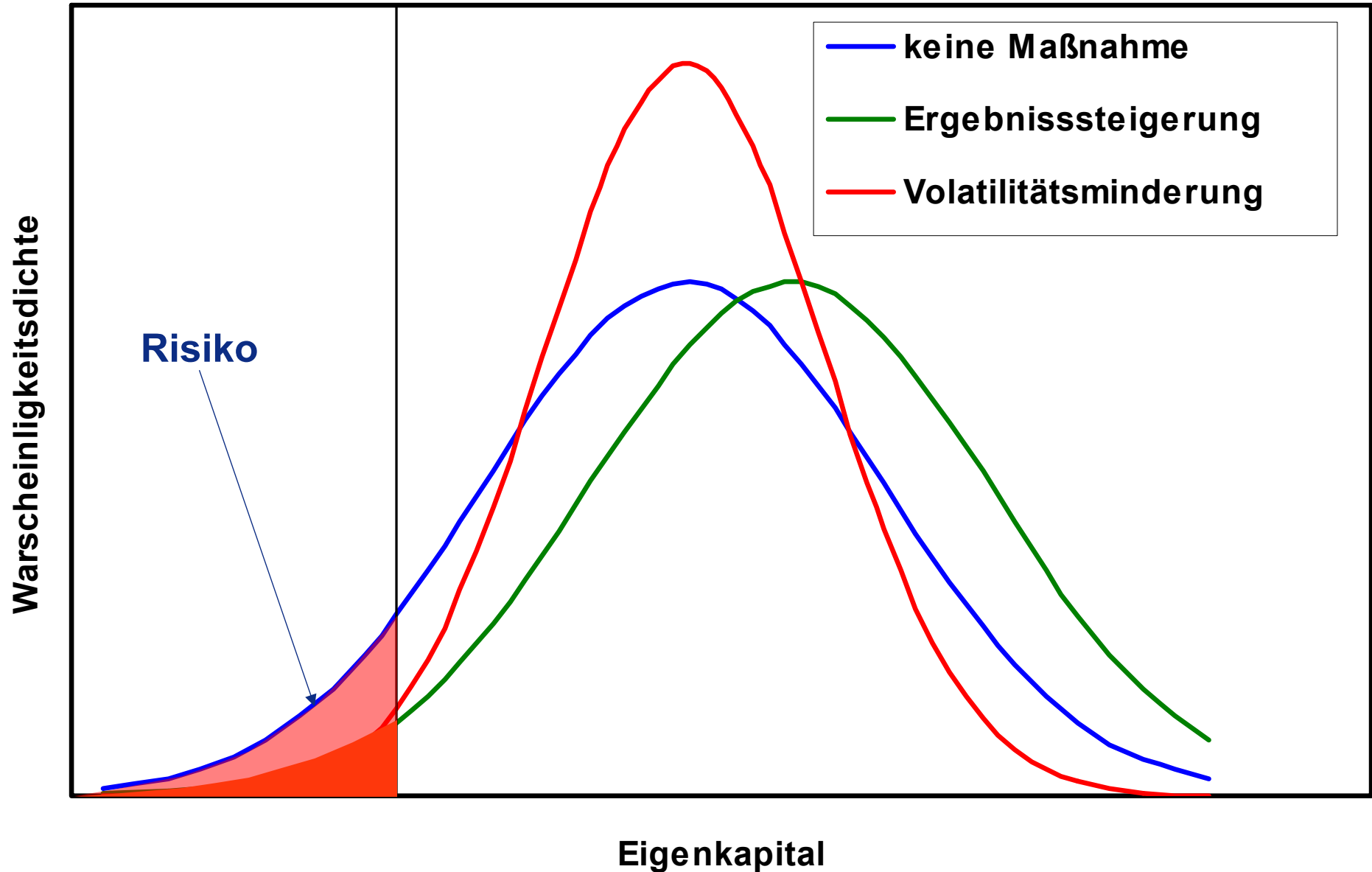
Proportionale Rückversicherung

Nicht-proportionale Rückversicherung

Warum Rückversicherung?



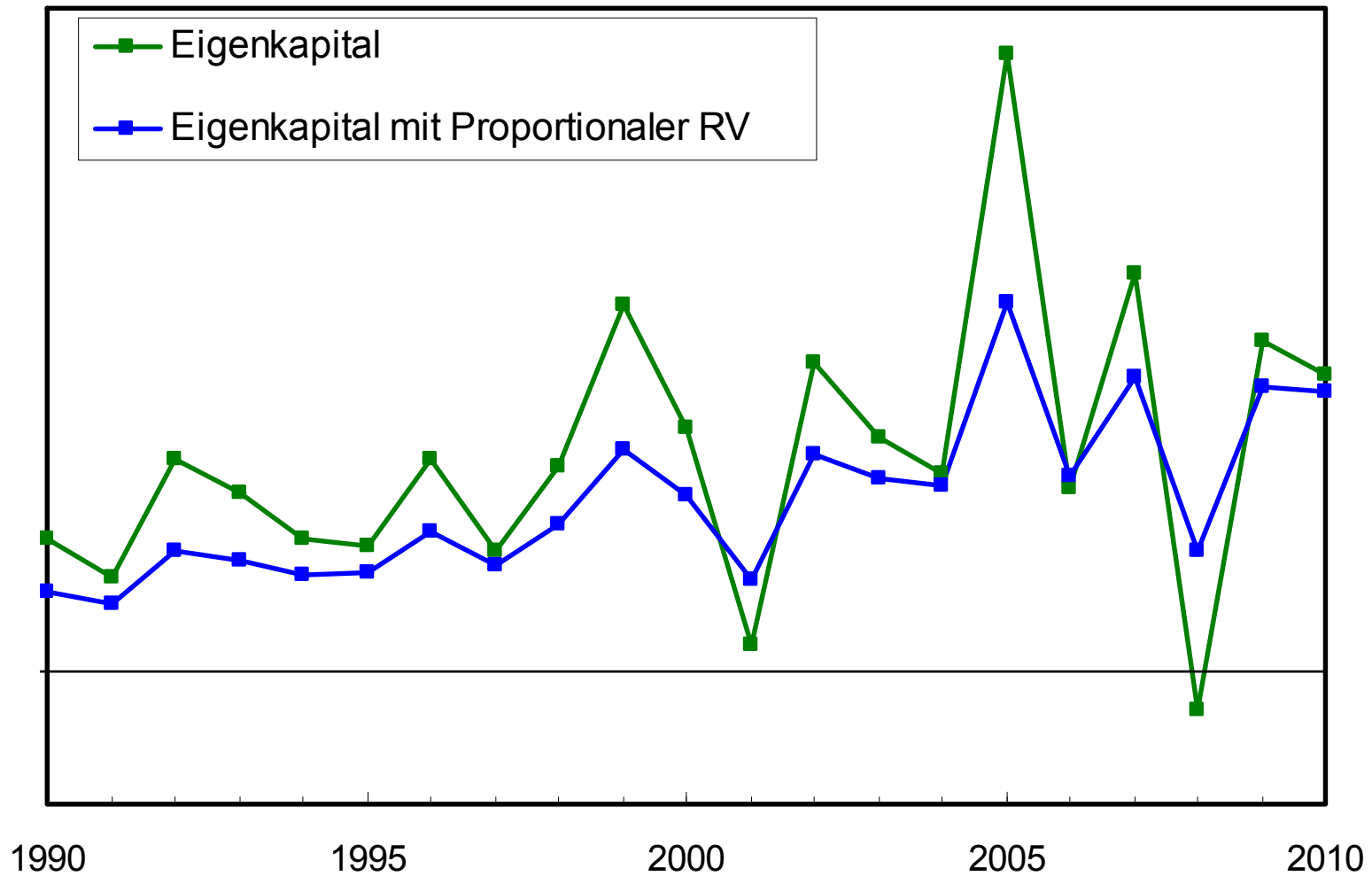
Warum Rückversicherung?



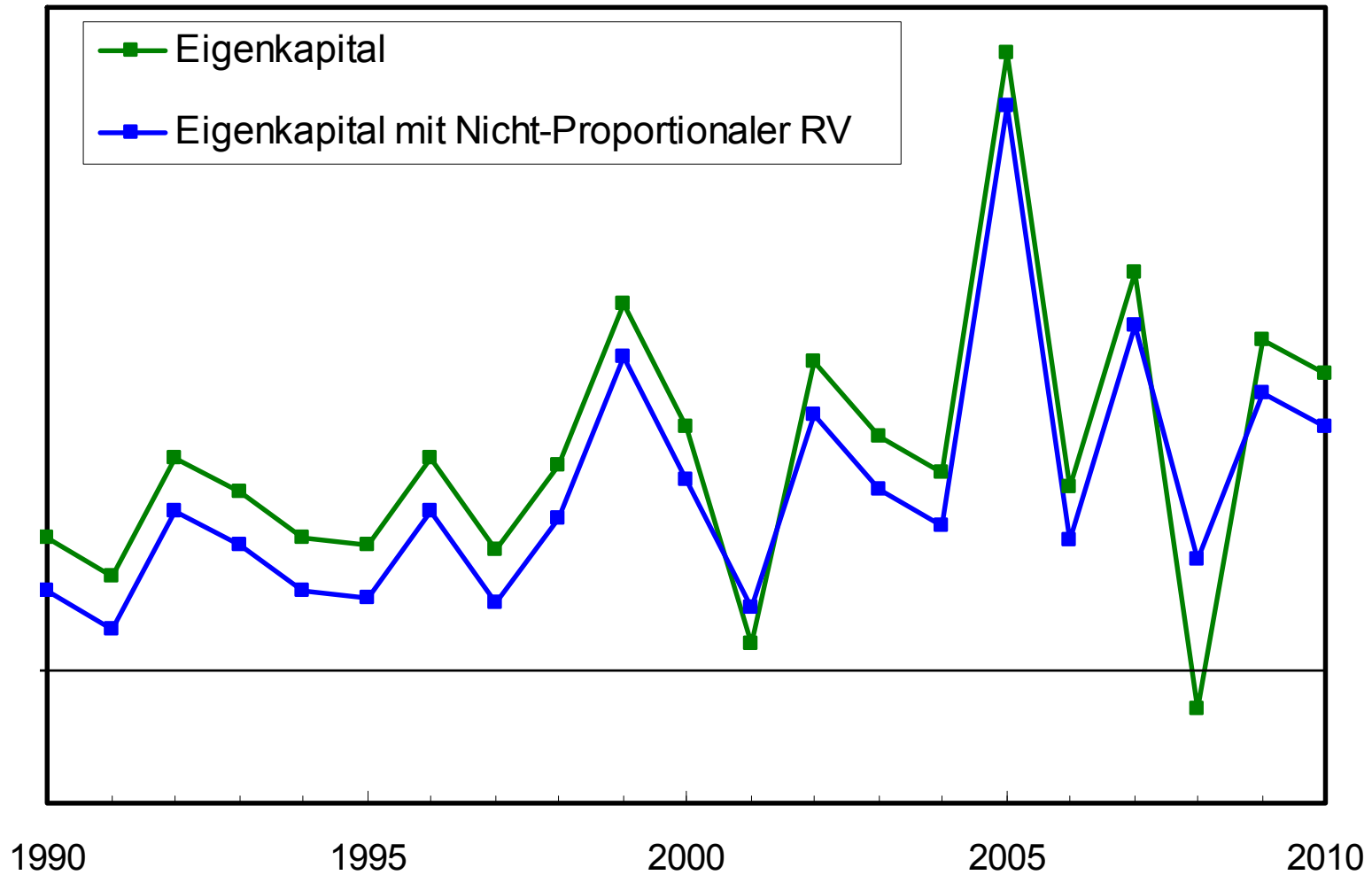
Eine erhöhte Volatilität des Eigenkapitals hat unangenehme Folgen:

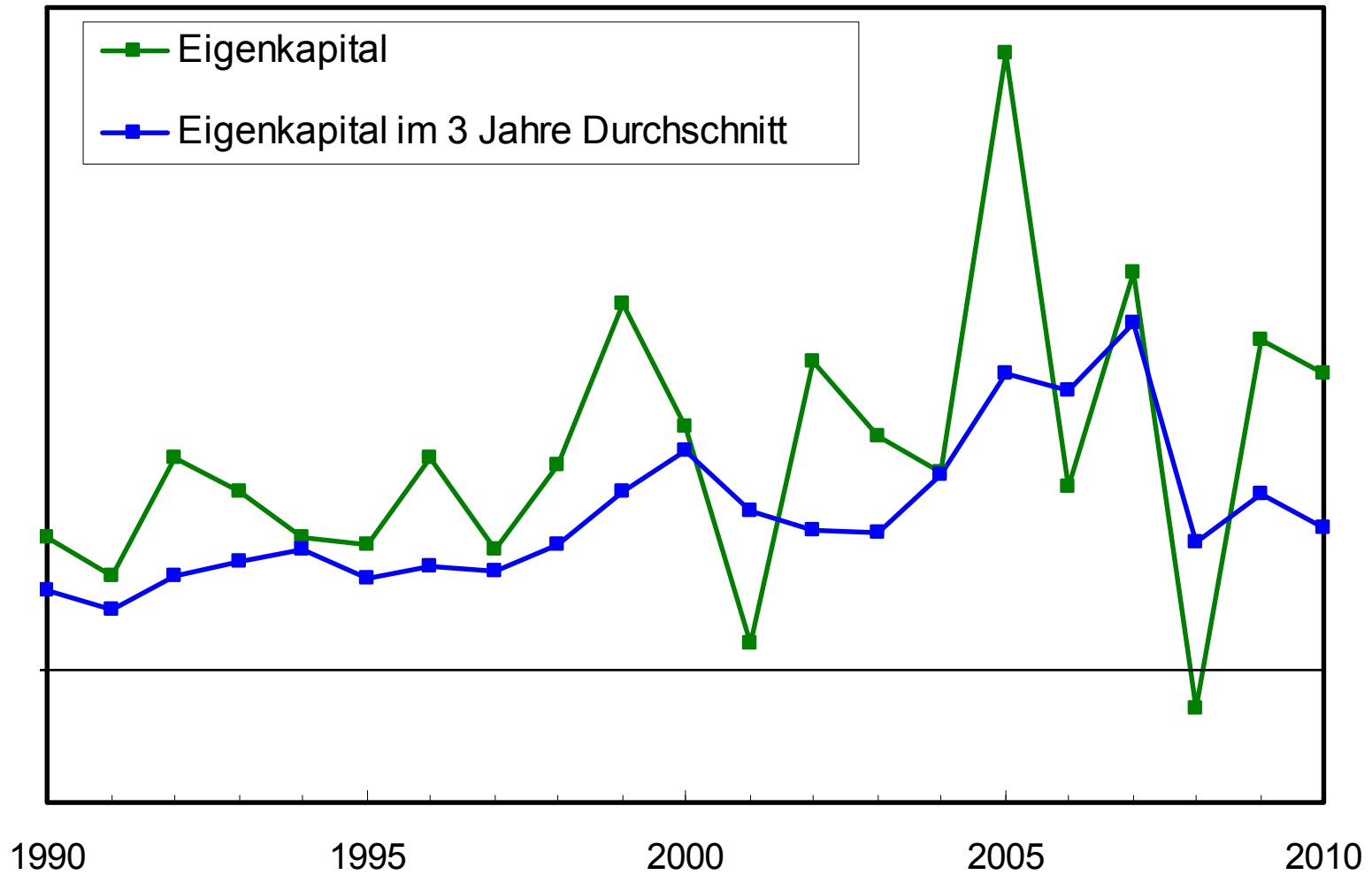
- Höherer durchschnittlicher Steuersatz
- Höhere Renditeerwartungen der Anleger
- Höhere Solvenzanforderungen
- ...

Proportionale Rückversicherung

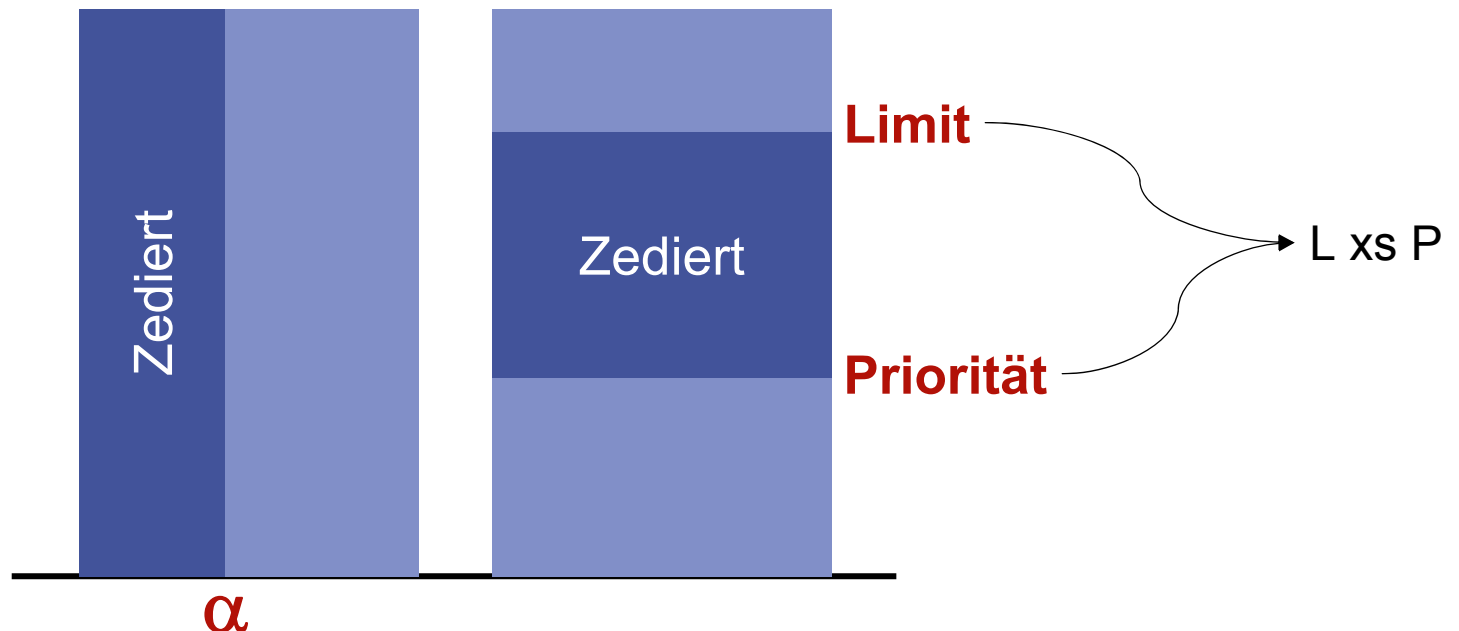


Nicht-proportionale Rückversicherung





	Proportional	Nicht-proportional
Gesamtschaden S	E: quota share D: Quote	E: stop loss D: Stop Loss
Einzelschaden X	E: surplus D: Summenexzedent	E: excess of loss D: Schadenexzedent



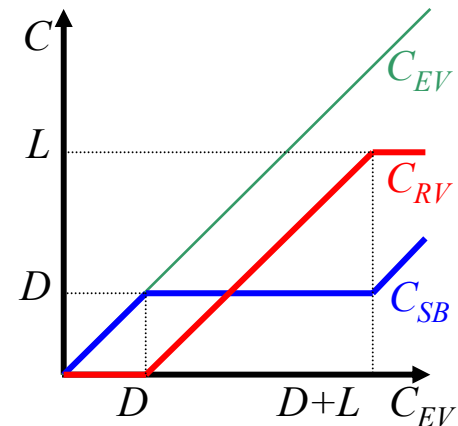
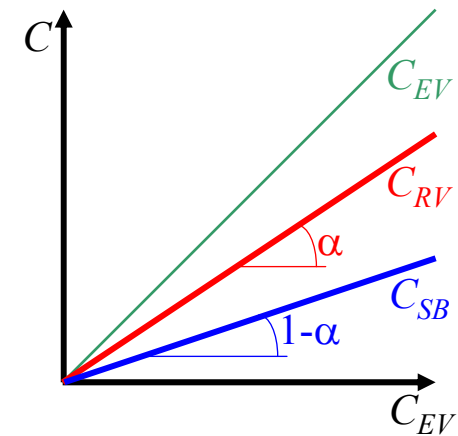
Grundformen

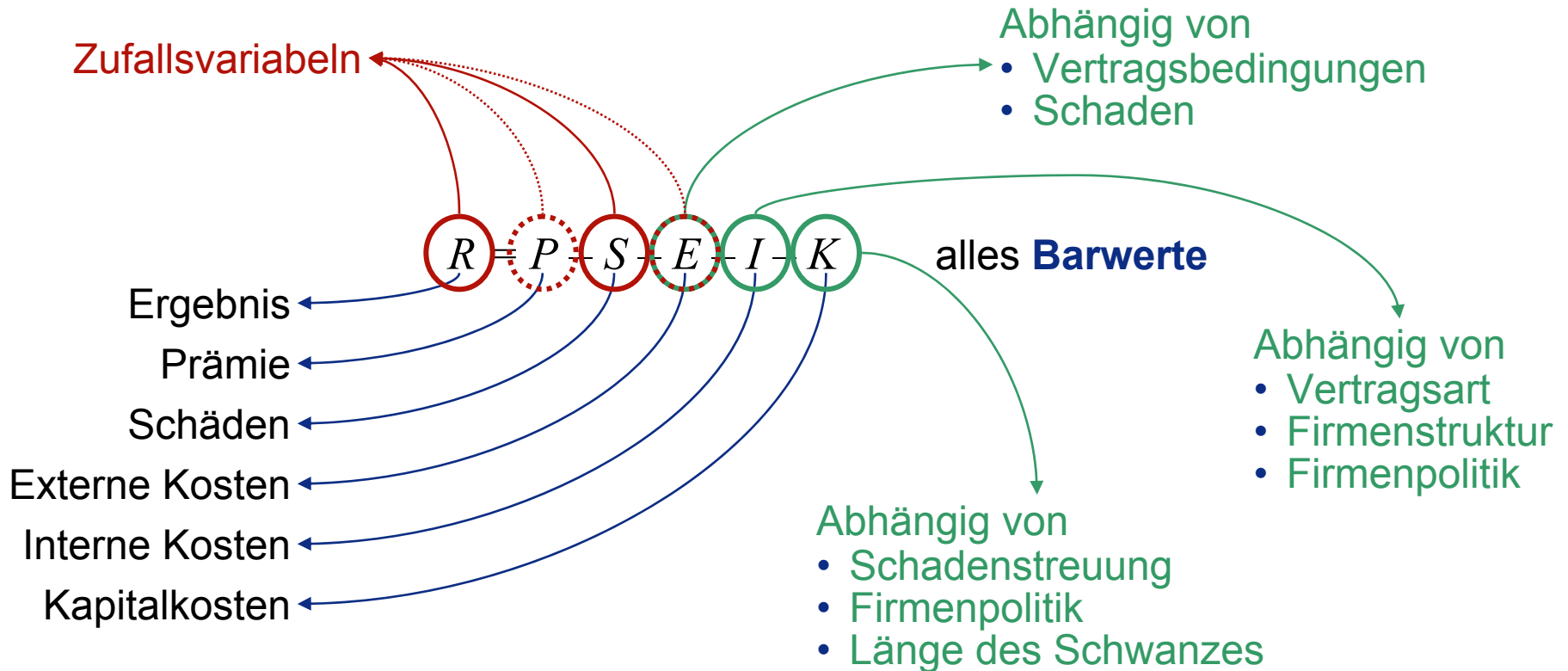
$N = \text{Frequenz} = \text{Anzahl Schäden}$
 $X^i = \text{Betrag Einzelschaden } i$
 $S = \text{Betrag Gesamtschaden} = \sum_{i=1}^N X^i$

QS: $S_{RV} = \alpha S_{EV}$ $P_{RV} = \alpha P_{EV}$
SE: $X^i_{RV} = \alpha^i X^i_{EV}$ $P^i_{RV} = \alpha^i P^i_{EV}$
 $\alpha^i = f(V^i)$ $V^i = \text{Versicherungssumme Risiko } i$

SL: $S_{RV} = \max[0, \min(S_{EV} - D, L)]$ $P_{RV} \neq f(P_{EV})$
XL: $X_{RV} = \max[0, \min(X_{EV} - D, L)]$ $P_{RV} \neq f(P_{EV})$

$C = S \text{ oder } X$





Die **gesamte Verteilung** von S ist wichtig (nicht nur ihr Mittelwert), weil:

- P & E können nicht-lineare Funktion von S sein
- K ist eine Statistik (mit höheren Momenten) von S

Warum Rückversicherung?

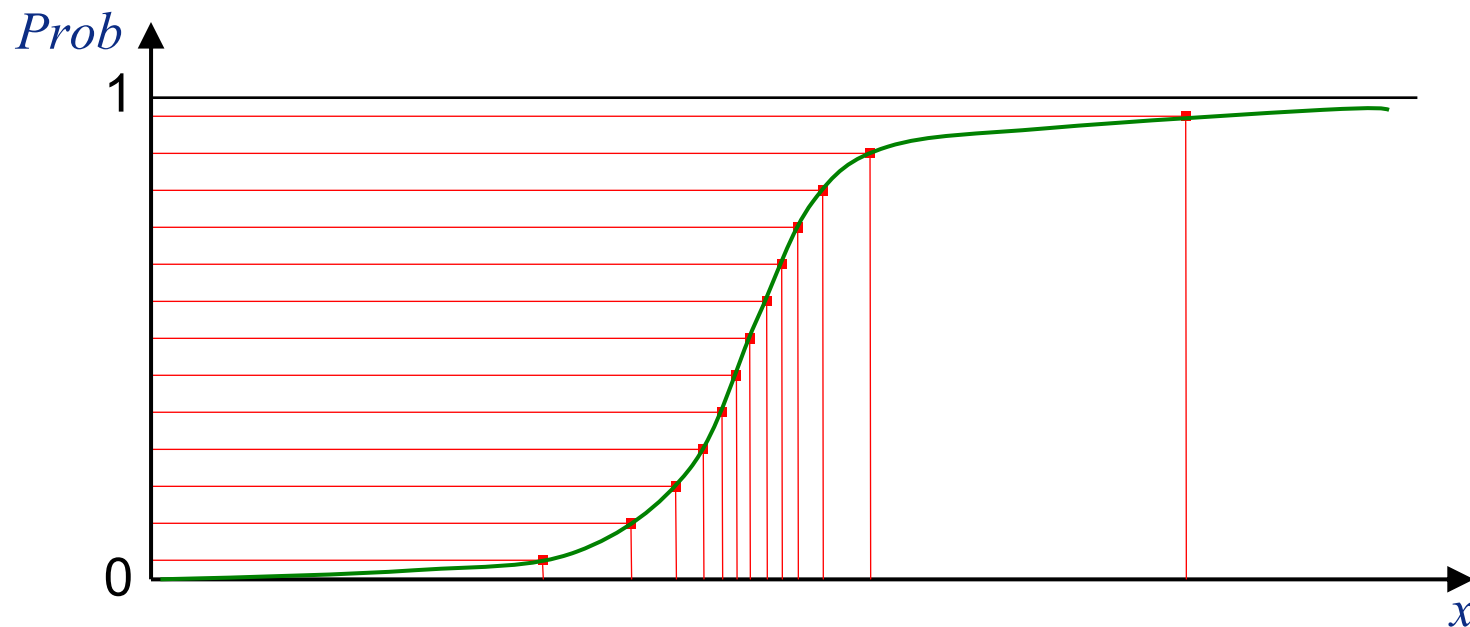
Proportionale Rückversicherung

Nicht-proportionale Rückversicherung

- $S_{RV} = \alpha S_{EV}$ $P_{RV} = \alpha P_{EV}$
- Rückversicherungsergebnis: $R = P - S_{RV} - E - I - K$
- Modelliere R anhand der historischen Schadenquoten $\rho = S_{RV}/P_{RV} = S_{EV}/P_{EV}$
(Exkurs)
- Typischerweise: Anpassung von ρ an eine Normal oder Lognormal Verteilung
(Exkurs)
- **Quotierungskriterium = Kommissionen**

- Messung & Übernahme der Momente
 - ☺ Einfacher geht's nicht mehr
 - ☹ Kann Modelle nicht vergleichen
 - Keinen Anpassungstest
 - Keinen Schätzfehler
- Maximum Likelihood
 - ☺ Auch sehr einfach
 - Kann Modelle Vergleichen
 - ☹ Keinen Anpassungstest
 - Keinen Schätzfehler
- Chi Quadrat
 - ☺ Nicht wirklich schwierig
 - Kann Modelle Vergleichen
 - Kann Anpassung testen
 - Kann Schätzfehler ermitteln

- Stochastisches Modell: $Prob(X < x) = f(x)$
- Zur Simulation:
 - Invertiere: $x = f^{-1}(Prob)$
 - Generiere: $Prob \sim U(0,1)$



- Multidimensionales Modell ($x \rightarrow x, y, \dots$): simuliere Abhängigkeiten mit Copulas

Quota Share Externe Kosten

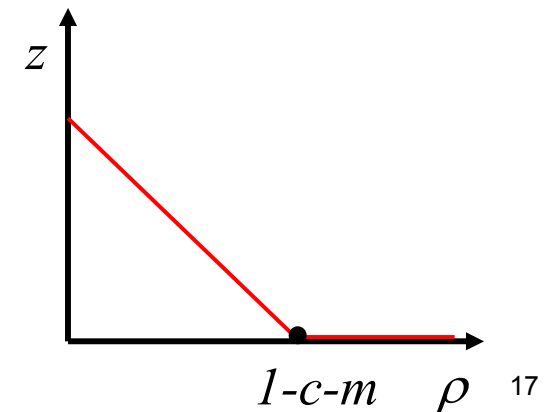
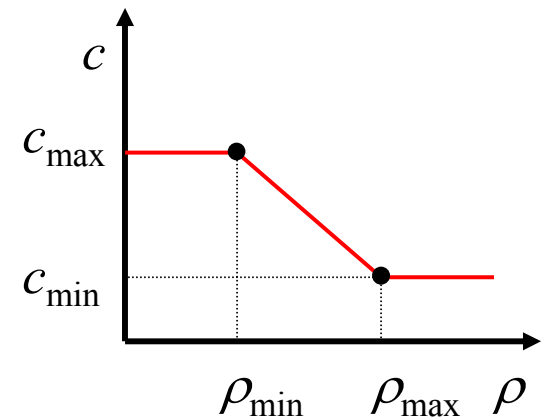
$$E = Z + C + B = (z + c + b)P$$

Courtage: $b = \textit{konstante}$

Kommission: $c = \textit{konstante}$

Sliding scale: $c = c(\rho)$

Profit Kommission: $z = z(\rho)$



Caveat: welche Prämie?

- Schadenmodell: **verdiente** Prämie
- Externe Kosten: **gezeichnete** Prämie
 - Risks attaching: gezeichnete Prämie = verdiente Prämie
 - Losses occurring: gezeichnete Prämie \neq verdiente Prämie
 - Clean cut: gezeichnete Prämie \neq verdiente Prämie

Excel Beispiel

Kalenderjahreffekte

- Reservierungspolitik
- Rechtssprechung
- Inflation (falls für Schäden & Prämien verschieden)

Zeichnungsjahreffekte

- Prämienanpassungen
- Vertragsanpassungen
- Schadenentwicklung (manchmal auch Prämien)
(Exkurs)

$$S_{d+1} = \lambda_d \cdot S_d$$

Entwicklungsjahreffekte

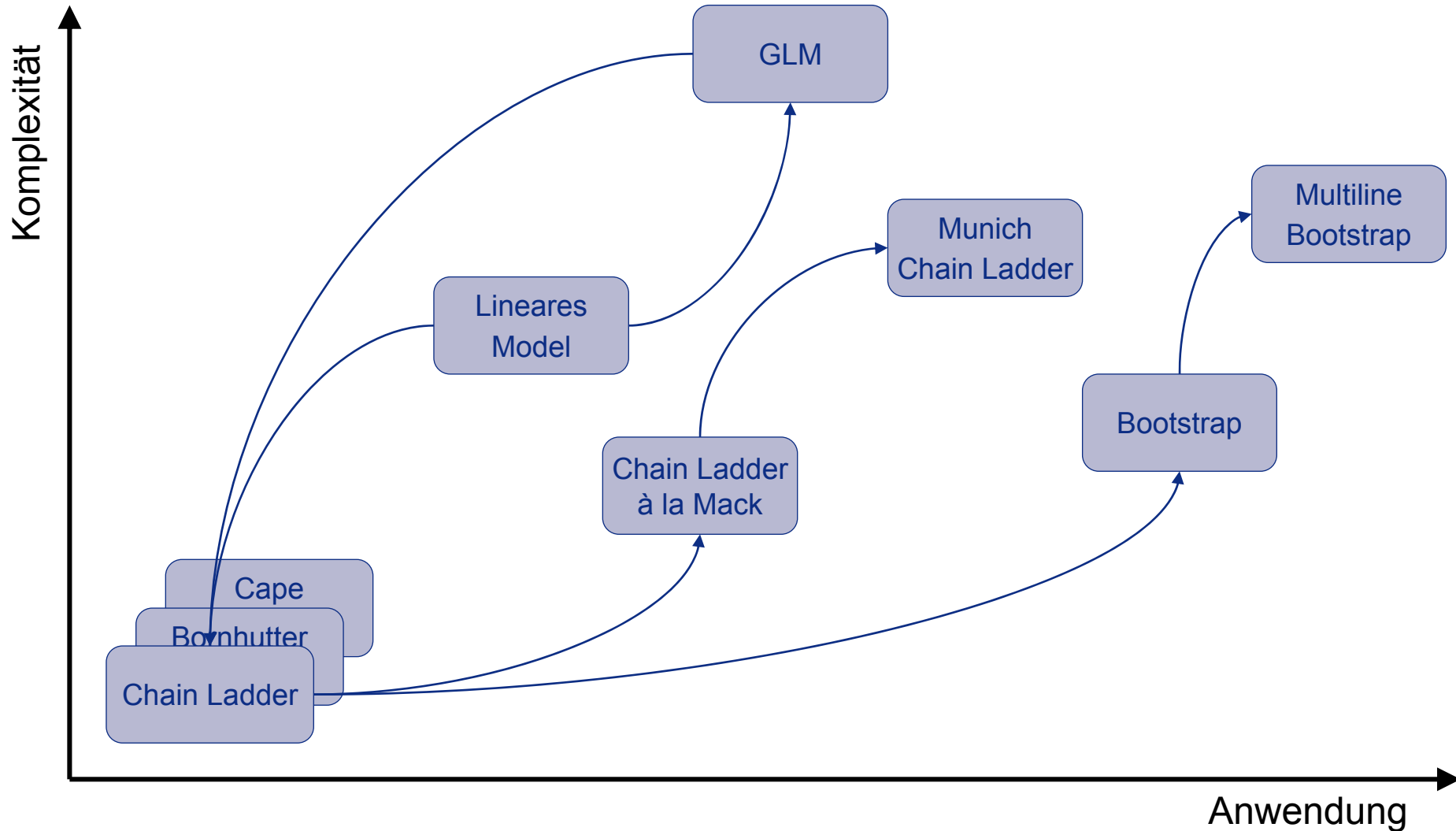
- Barwert = Multiplikativer Faktor anhand der Entwicklungsfaktoren
- Zahlungsklauseln anwenden

$$S_{\infty}^{\text{BW}} = S_{\infty} \sum_{y=1}^{\infty} f_y (1+v)^{-y}$$

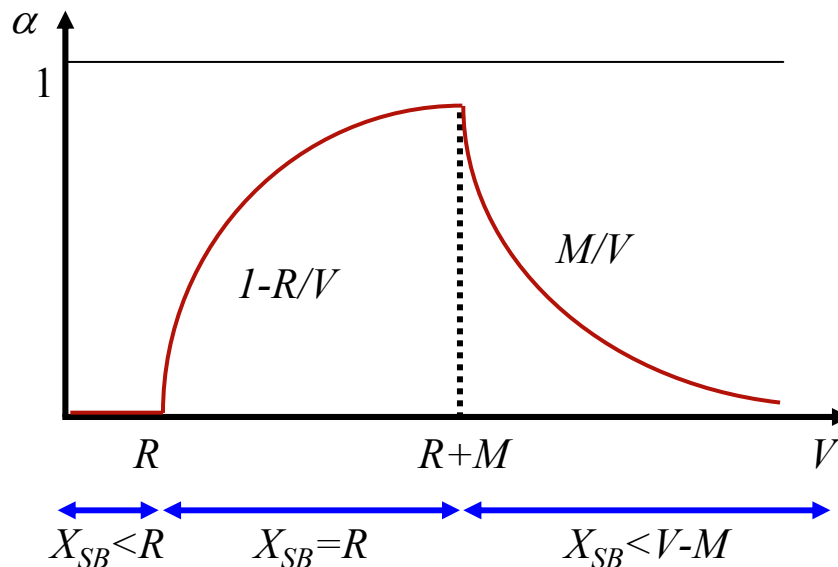
Quota Share Zahlungsklauseln



Exkurs: Schadenentwicklung



$$\left. \begin{aligned} X_{RV}^i &= \alpha^i X_{EV}^i \\ P_{RV}^i &= \alpha^i P_{EV}^i \end{aligned} \right\} \alpha^i = \alpha(V^i) \quad V^i = \text{Versicherungssumme Risiko } i$$



$\left\{ \begin{aligned} R &= \text{Selbstbehalt} \\ M &= n \cdot R \quad (n \text{ Linien}) \end{aligned} \right.$

- Falls Strukturen historisch unverändert, Tarifierung wie bei QS
anhand von $\rho = S_{RV}/P_{RV} (\neq S_{EV}/P_{EV})$
- Sonst Exposure Tarifierung

Warum Rückversicherung?

Proportionale Rückversicherung

Nicht-proportionale Rückversicherung

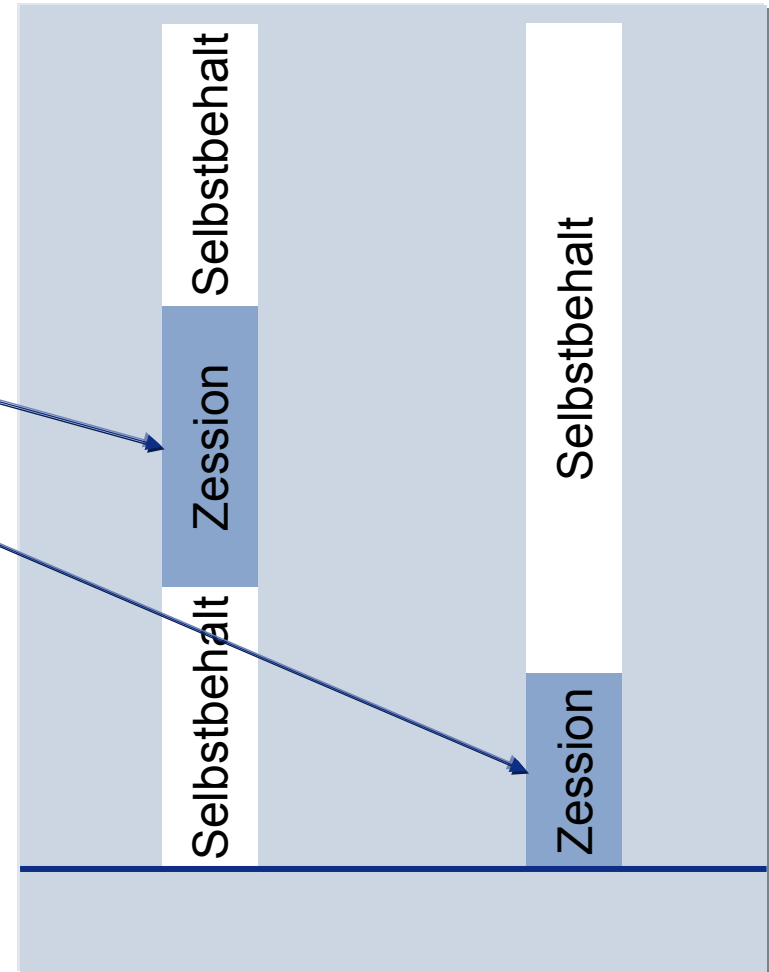
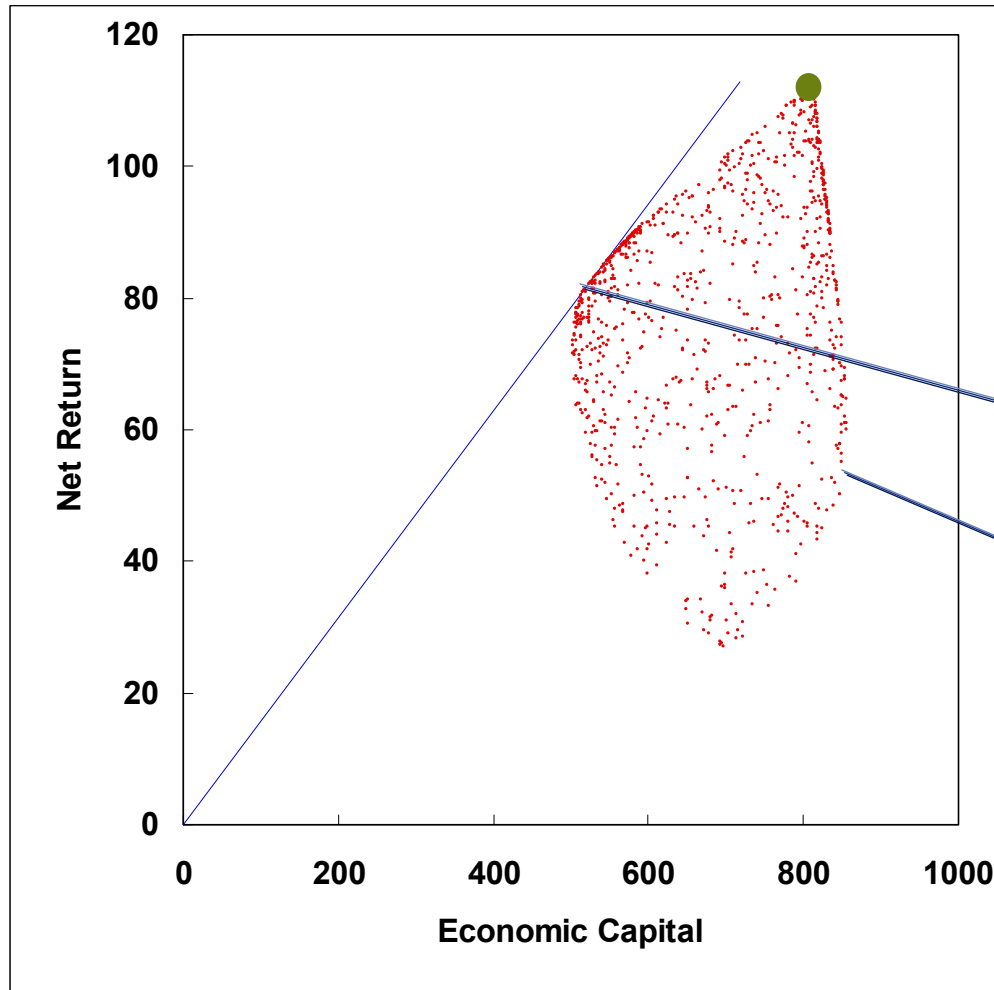
- $S_{RV} = S_{EV} \cdot \max[0 , \min(\rho - D , L)]$
- Rückversicherungsergebnis: $R = P - S_{RV} - E - I - K$
- Modelliere R anhand der historischen Schadenquoten $\rho = S_{EV}/P_{EV}$
- Anpassung von ρ an eine Normal oder Lognormal Verteilung
- **Quotierungskriterium = Rückversicherungsprämie**

Excel Beispiel



Stop Loss

Nutzen der Rückversicherung



- $X_{RV} = \max[0 , \min(X_{EV} - D , L)]$
- Rückversicherungsergebnis: $R = P - S_{RV} - E - I - K$ wobei $S_{RV} = \sum_{i=1}^N X_{RV}^i$
- Modelliere R anhand der historischen
 - Schadenfrequenzen N : Poisson (manchmal negativ Binomial)
 - Schadenhöhen X : Pareto, Lognormal, ... (alle iid)
- RV Schaden S wird numerisch durch Faltung ermittelt:
 - Panjer
 - FFT
 - Monte Carlo
- **Quotierungskriterium = Rückversicherungsprämie**

Excess of Loss Schadenverteilungen

- Pareto $Prob(X < x) = 1 - (T/x)^\alpha$
 - ☺ Erwartet von EVT
 - Nur ein Parameter
 - Parameter hat physische Interpretation
 - Parameter unverändert falls Schwelle erhöht
 - Vieles kann analytisch gelöst werden
 - ☹ Keine höhere Momente

Gefahr	α
Nat. Cat.	< 1
Feuer	~ 1.5
Allg. Haftpflicht	~ 2
Mot. Haftpflicht	~ 2.5
...	

- Benktander, Beta, Weibull, ...
 - ☺ Höhere Momente
 - Mehr Parameter
 - ☹ Mehr Parameter

Excel Beispiel

Limiten

- Reinstatements
- Aggregate Limiten
- Aggregate Franchisen
- Stabilisierungsklausel

Prämien

- Reinstatement Prämien (pro rata temporis oder Betrag)
- Sliding scale Prämie
- Profit Kommission
- No claims bonus

Datenbearbeitung zur Als-ob-Basis

Volumenmass

- Verschiedene Branchen haben verschiedene Schadentreiber
- Skalierung vorheriger Jahre auf heutige Perspektive
 - Per Risiko: $N \div V$
 - Per Ereignis: $X \div V$

Gefahr	Treiber
Feuer	Prämie
Mot. Kasko	Prämie
Mot. Haftpflicht	Anzahl Fahrzeuge
Arbeit Unfall	Salär
Aviation	Anzahl Flüge
...	

Inflation

- Kann für Schäden & Prämien verschieden sein

Beobachtungsschwelle

- Wegen Inflation, sollten wesentlich tiefere Schäden gemeldet werden, als das tiefste Layer

Kalenderjahreffekte

- Reservierungspolitik
- Inflationen (unterschiedliche Effekte auf Frequenz & Schadenhöhe)

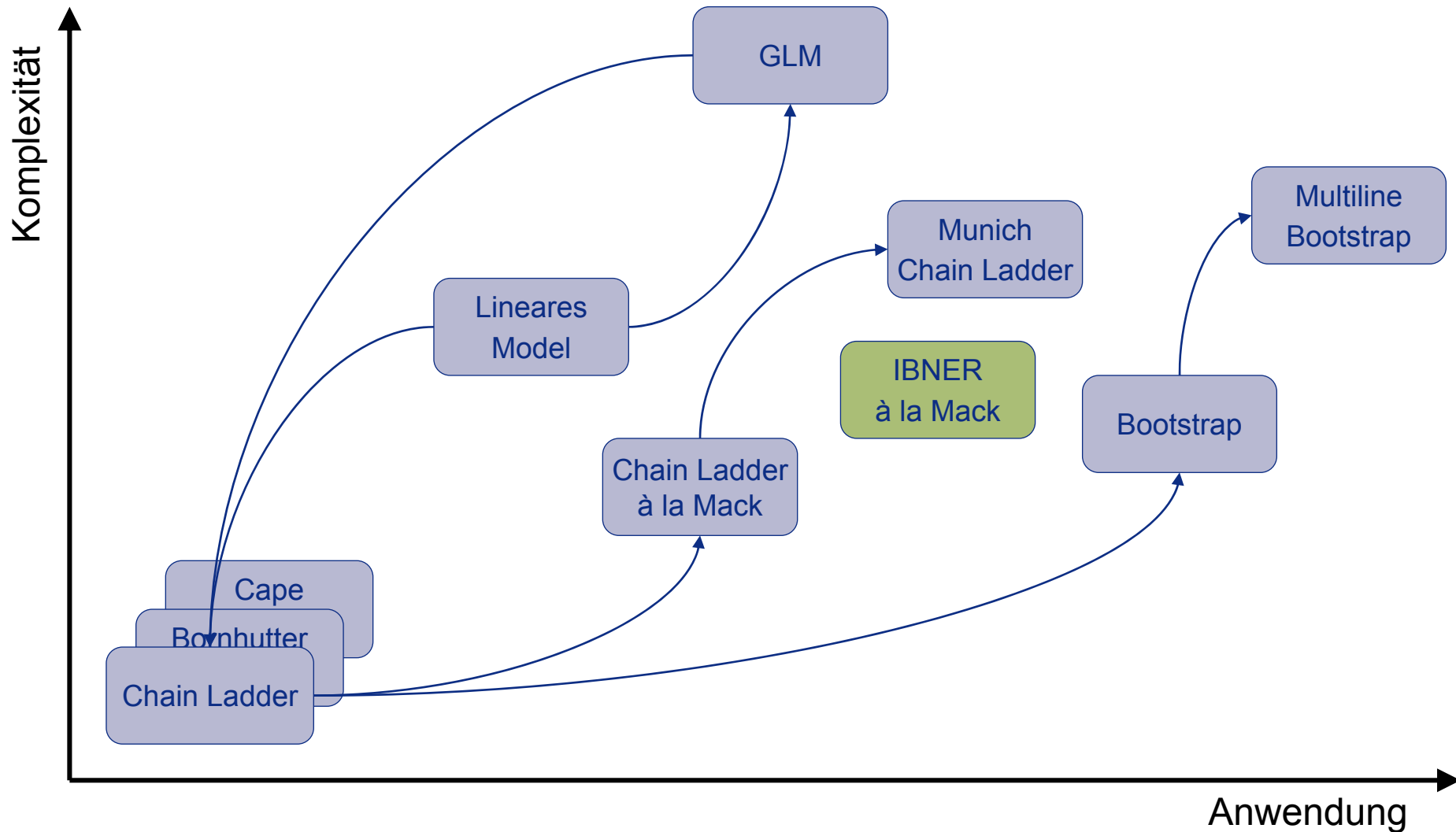
Zeichnungsjahreffekte

- Prämienanpassungen (falls Prämie = Volumenmass)
- Entwicklung der einzelnen Grossschäden gemäss
 - dem Muster des Gesamtschadens ODER
 - der Muster der früheren einzelnen Grossschäden
 - Mack Methode
 - Künstliche Intelligenz

Entwicklungsjahreffekte

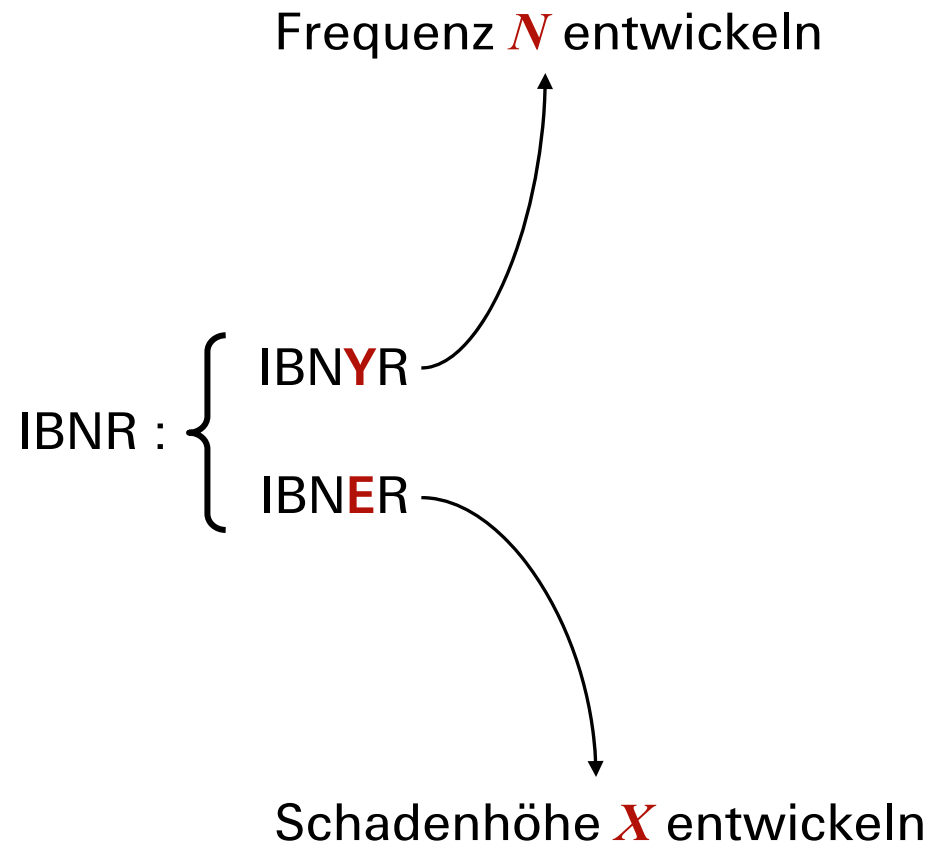
- Barwert = Multiplikativer Faktor anhand der Entwicklungsfaktoren $\sum_{y=1}^{\infty} f_y (1 + v)^{-y}$

Exkurs: Schadenentwicklung



Excess of Loss IBNR

ZJ	Schäden
2 001	187
	197
	228
	204
2 002	179
	188
	169
2 003	167
	143
	159
2 004	100
	103



Excess of Loss IBNR

		Entwicklungsjahre			
		1	2	3	4
Zeichnungsjahre	2001	102	152	189	204
		113	145	169	197
			151	192	228
				178	187
	2002	108	152	179	
		101	146	188	
		112	155	169	
	2003	111	167		
		97	143		
			159		
	2004	100			
		103			

IBN^YR Dreieck:

		EJ			
		1	2	3	4
ZJ	2001	2	3	4	4
	2002	3	3	3	
	2003	2	3		
	2004	2			

Mit Lieblingsstandardmethode
entwickeln

IBN^ER Dreieck:

		EJ			
		1	2	3	4
ZJ	2001	215	448	728	816
	2002	321	453	536	
	2003	208	469		
	2004	203			

Mehr im Detail aaluogen

IBNER à la Mack

Prinzip

		Entwicklungsjahre							
		bezahlt 1	reserviert 1	bezahlt 2	reserviert 2	bezahlt 3	reserviert 3	bezahlt 4	reserviert 4
Zeichnungsjahre	2001	P(1,1,1)	R(1,1,1)	P(1,2,1)	R(1,2,1)	P(1,3,1)	R(1,3,1)	P(1,4,1)	R(1,4,1)
		P(1,1,2)	R(1,1,2)	P(1,2,2)	R(1,2,2)	P(1,3,2)	R(1,3,2)	P(1,4,2)	R(1,4,2)
		P(1,1,3)	R(1,1,3)	P(1,2,3)	R(1,2,3)	P(1,3,3)	R(1,3,3)	P(1,4,3)	R(1,4,3)
		P(1,1,4)	R(1,1,4)	P(1,2,4)	R(1,2,4)	P(1,3,4)	R(1,3,4)	P(1,4,4)	R(1,4,4)
	2002	P(2,1,1)	R(2,1,1)	P(2,2,1)	R(2,2,1)	P(2,3,1)	R(2,3,1)		
		P(2,1,2)	R(2,1,2)	P(2,2,2)	R(2,2,2)	P(2,3,2)	R(2,3,2)		
		P(2,1,3)	R(2,1,3)	P(2,2,3)	R(2,2,3)	P(2,3,3)	R(2,3,3)		
	2003	P(3,1,1)	R(3,1,1)	P(3,2,1)	R(3,2,1)				
		P(3,1,2)	R(3,1,2)	P(3,2,2)	R(3,2,2)				
		P(3,1,3)	R(3,1,3)	P(3,2,3)	R(3,2,3)				
	2004	P(4,1,1)	R(4,1,1)						
		P(4,1,2)	R(4,1,2)						

Zeichnungsjahr Index

Entwicklungsjahr Index

Schaden Index

IBNER à la Mack

Prinzip

		Entwicklungsjahre							
		bezahlt 1	reserviert 1	bezahlt 2	reserviert 2	bezahlt 3	reserviert 3	bezahlt 4	reserviert 4
Zeichnungsjahre	2001	P(1,1,1)	R(1,1,1)	P(1,2,1)	R(1,2,1)	P(1,3,1)	R(1,3,1)	P(1,4,1)	R(1,4,1)
		P(1,1,2)	R(1,1,2)	P(1,2,2)	R(1,2,2)	P(1,3,2)	R(1,3,2)	P(1,4,2)	R(1,4,2)
		P(1,1,3)	R(1,1,3)	P(1,2,3)	R(1,2,3)	P(1,3,3)	R(1,3,3)	P(1,4,3)	R(1,4,3)
		P(1,1,4)	R(1,1,4)	P(1,2,4)	R(1,2,4)	P(1,3,4)	R(1,3,4)	P(1,4,4)	R(1,4,4)
	2002	P(2,1,1)	R(2,1,1)	P(2,2,1)	R(2,2,1)	P(2,3,1)	R(2,3,1)		
		P(2,1,2)	R(2,1,2)	P(2,2,2)	R(2,2,2)	P(2,3,2)	R(2,3,2)		
		P(2,1,3)	R(2,1,3)	P(2,2,3)	R(2,2,3)	P(2,3,3)	R(2,3,3)		
	2003	P(3,1,1)	R(3,1,1)	P(3,2,1)	R(3,2,1)				
		P(3,1,2)	R(3,1,2)	P(3,2,2)	R(3,2,2)				
		P(3,1,3)	R(3,1,3)	P(3,2,3)	R(3,2,3)				
	2004	P(4,1,1)	R(4,1,1)						
		P(4,1,2)	R(4,1,2)						

Ähnlichster vorherigen Schaden
= Referenzschaden

IBNER à la Mack

Prinzip

		Entwicklungsjahre							
		bezahlt 1	reserviert 1	bezahlt 2	reserviert 2	bezahlt 3	reserviert 3	bezahlt 4	reserviert 4
Zeichnungsjahre	2001	P(1,1,1)	R(1,1,1)	P(1,2,1)	R(1,2,1)	P(1,3,1)	R(1,3,1)	P(1,4,1)	R(1,4,1)
		P(1,1,2)	R(1,1,2)	P(1,2,2)	R(1,2,2)	P(1,3,2)	R(1,3,2)	P(1,4,2)	R(1,4,2)
		P(1,1,3)	R(1,1,3)	P(1,2,3)	R(1,2,3)	P(1,3,3)	R(1,3,3)	P(1,4,3)	R(1,4,3)
		P(1,1,4)	R(1,1,4)	P(1,2,4)	R(1,2,4)	P(1,3,4)	R(1,3,4)	P(1,4,4)	R(1,4,4)
	2002	P(2,1,1)	R(2,1,1)	P(2,2,1)	R(2,2,1)	P(2,3,1)	R(2,3,1)	P(2,4,1)	R(2,4,1)
		P(2,1,2)	R(2,1,2)	P(2,2,2)	R(2,2,2)	P(2,3,2)	R(2,3,2)	P(2,4,2)	R(2,4,2)
		P(2,1,3)	R(2,1,3)	P(2,2,3)	R(2,2,3)	P(2,3,3)	R(2,3,3)	P(2,4,3)	R(2,4,3)
	2003	P(3,1,1)	R(3,1,1)	P(3,2,1)	R(3,2,1)	P(3,3,1)	R(3,3,1)	P(3,4,1)	R(3,4,1)
		P(3,1,2)	R(3,1,2)	P(3,2,2)	R(3,2,2)	P(3,3,2)	R(3,3,2)	P(3,4,2)	R(3,4,2)
		P(3,1,3)	R(3,1,3)	P(3,2,3)	R(3,2,3)	P(3,3,3)	R(3,3,3)	P(3,4,3)	R(3,4,3)
	2004	P(4,1,1)	R(4,1,1)	P(4,2,3)	R(4,2,3)	P(4,3,1)	R(4,3,1)	P(4,4,1)	R(4,4,1)
		P(4,1,2)	R(4,1,2)	P(4,2,4)	R(4,2,4)	P(4,3,2)	R(4,3,2)	P(4,4,2)	R(4,4,2)

- Definiere eine Metrik
 - Euklidisch: $d(X_1, X_2) = [(P_1 - P_2)^2 + (R_1 - R_2)^2]^{1/2}$
- Definiere die Distanz D zwischen 2 Schäden
 - $D = d(X_1^{EJ}, X_2^{EJ})$
 - $D_{max} = \max_{EJ} d(X_1^{EJ}, X_2^{EJ})$
 - $D_{total} = \sum_{EJ} d(X_1^{EJ}, X_2^{EJ})$
- Definiere den Referenzschaden χ
 - Ähnlichster vorherigen Schaden der Zeichnungsjahren
 - Mittelwert der vorherigen Schäden mit Gewicht $1/D$
- Definiere die Entwicklungsmethode aus dem Referenzschaden χ
 - additiv: $X^{EJ+1} = X^{EJ} + (\chi^{EJ+1} - \chi^{EJ})$
 - multiplikativ: $X^{EJ+1} = X^{EJ} \cdot \chi^{EJ+1} / \chi^{EJ}$



- Weniger Information geht verloren
- Schäden können anhand Industriedaten entwickelt werden



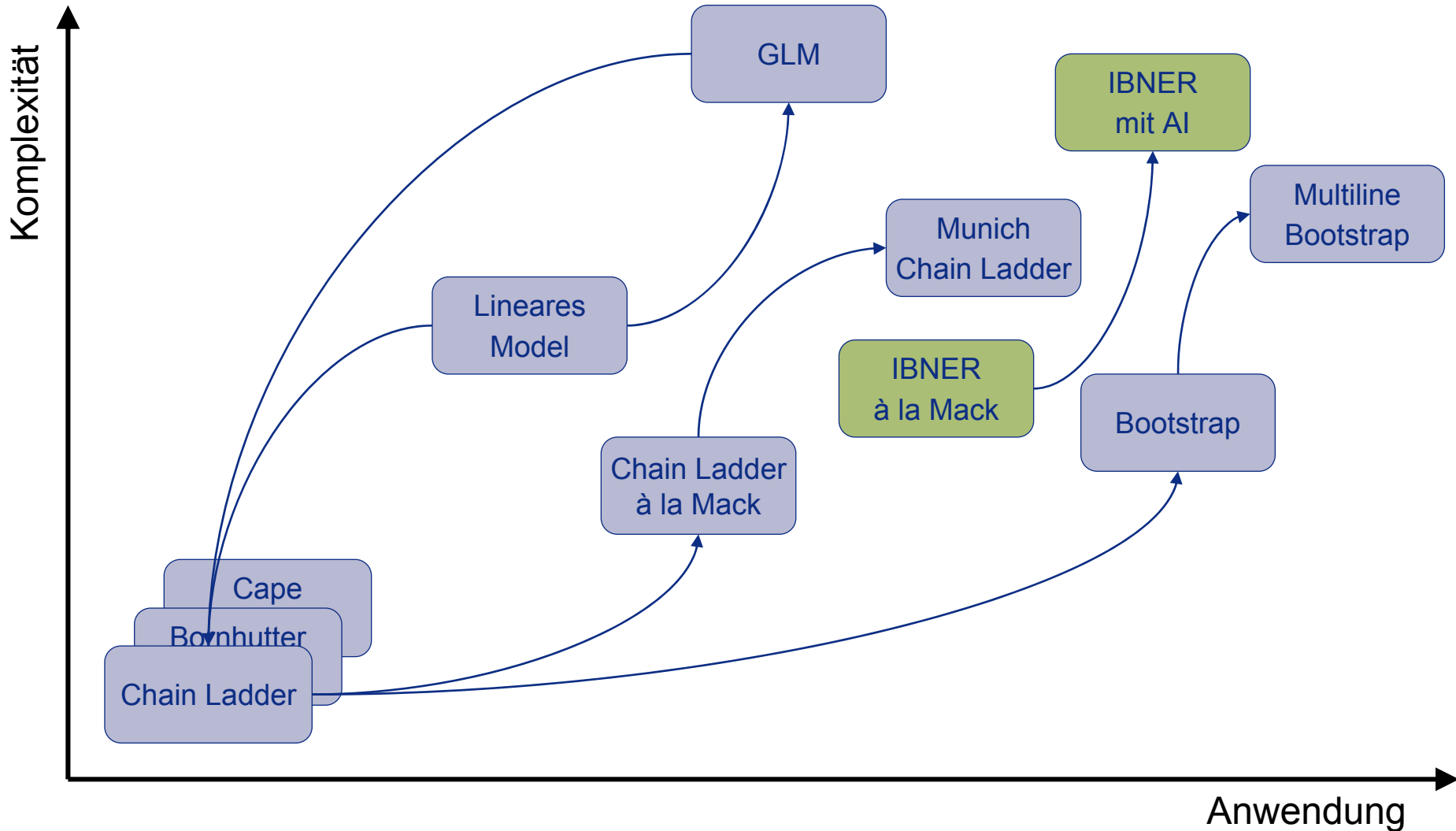
- Viele willkürliche Optionen
- Algorithmus langsam falls viele Schäden
- Varianz-/Fehlerschätzung mathematisch unsauber

[Mack \(1997\)](#)

[Schadensversicherungsmathematik](#)

[Verl. Versicherungswirtschaft, ISBN 3-88487-582-5](#)

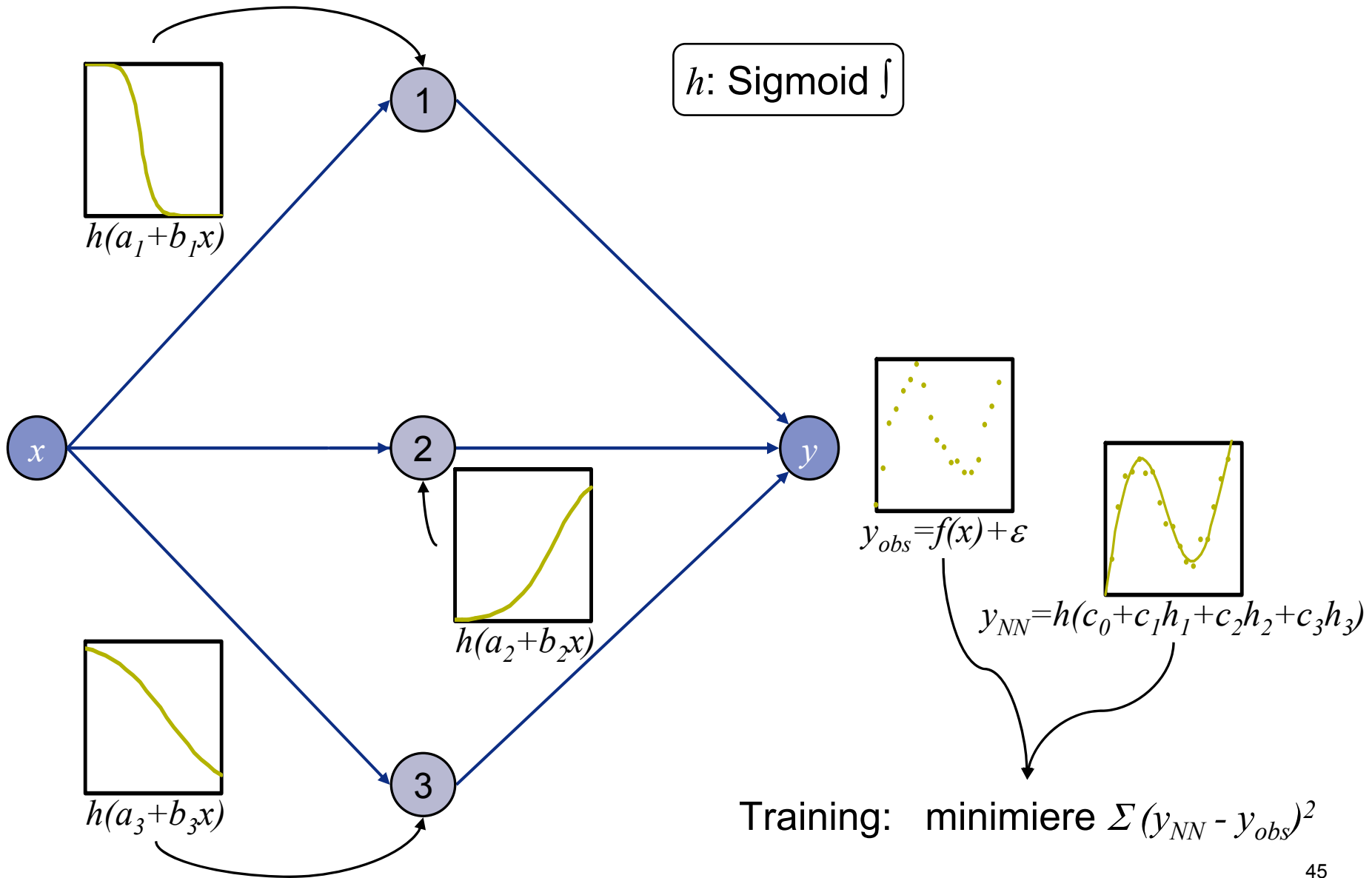
Exkurs: Schadenentwicklung



- Es fehlt ein zugrunde liegendes Prinzip
⇒ Mack Methode kann man in zu vielen Varianten implementieren
- Typisches Problem der Mustererkennung
⇒ Methoden des Data Minings sind rigiden Algorithmen überlegen
- Entwerfe ein neuronales Netzwerk
⇒ trainiere es mit den schon weiter entwickelten Schäden

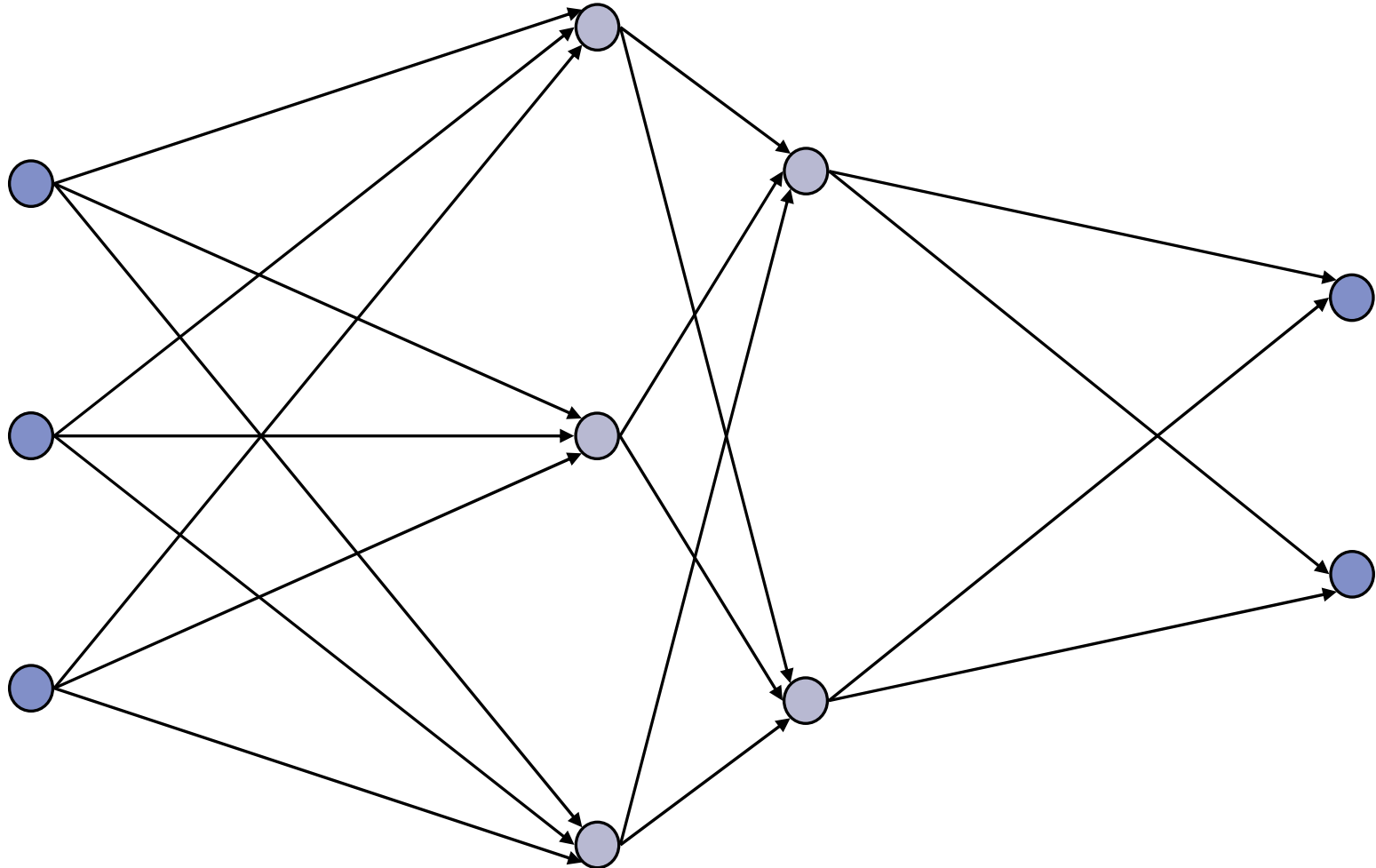
IBNER mit Künstlicher Intelligenz

Neuronales Netzwerk (einfach)



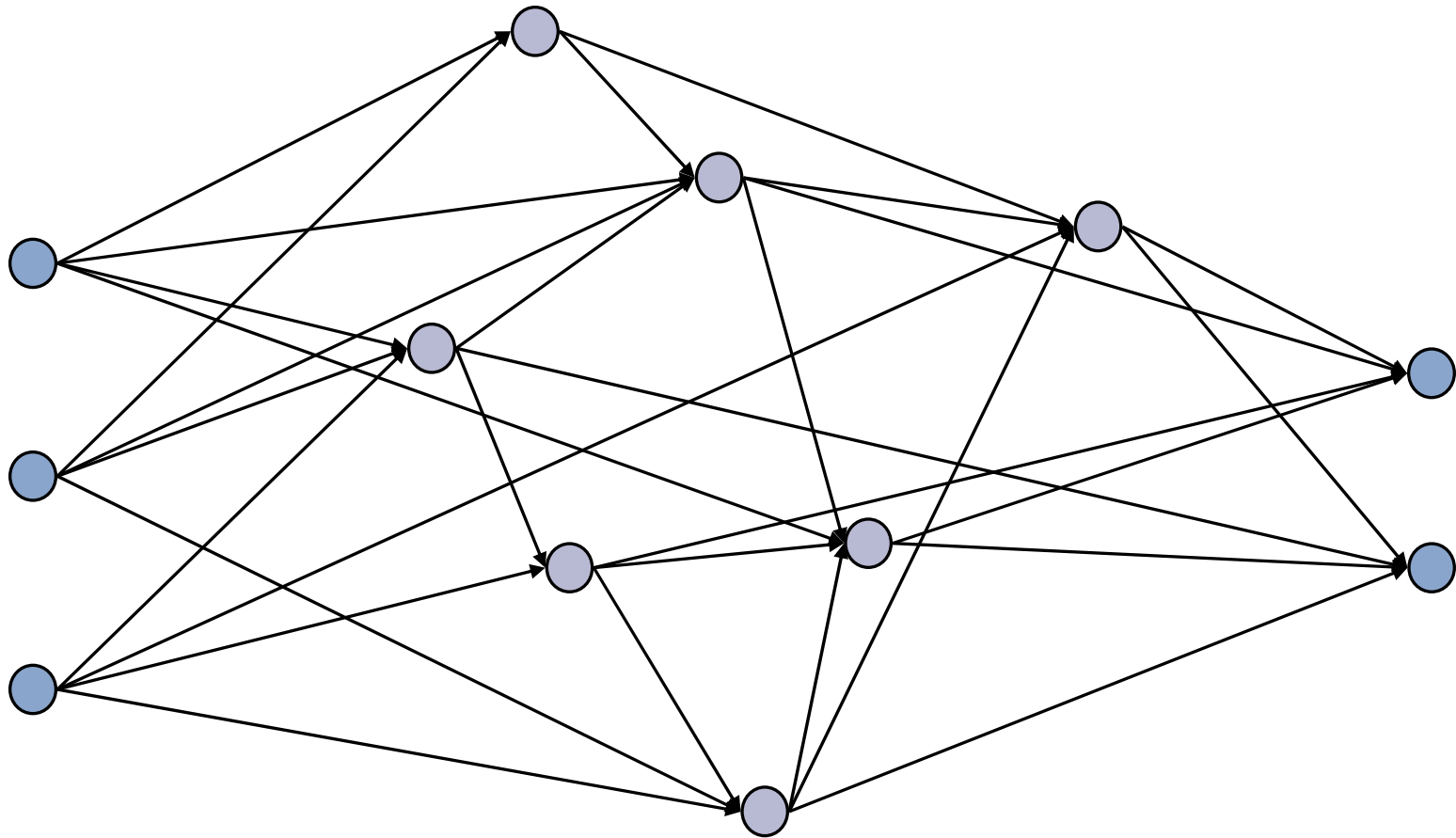
IBNER mit Künstlicher Intelligenz

Neuronales Netzwerk (2 hidden layers)



IBNER mit Künstlicher Intelligenz

Neuronales Netzwerk (self organised)



IBNER à la Mack

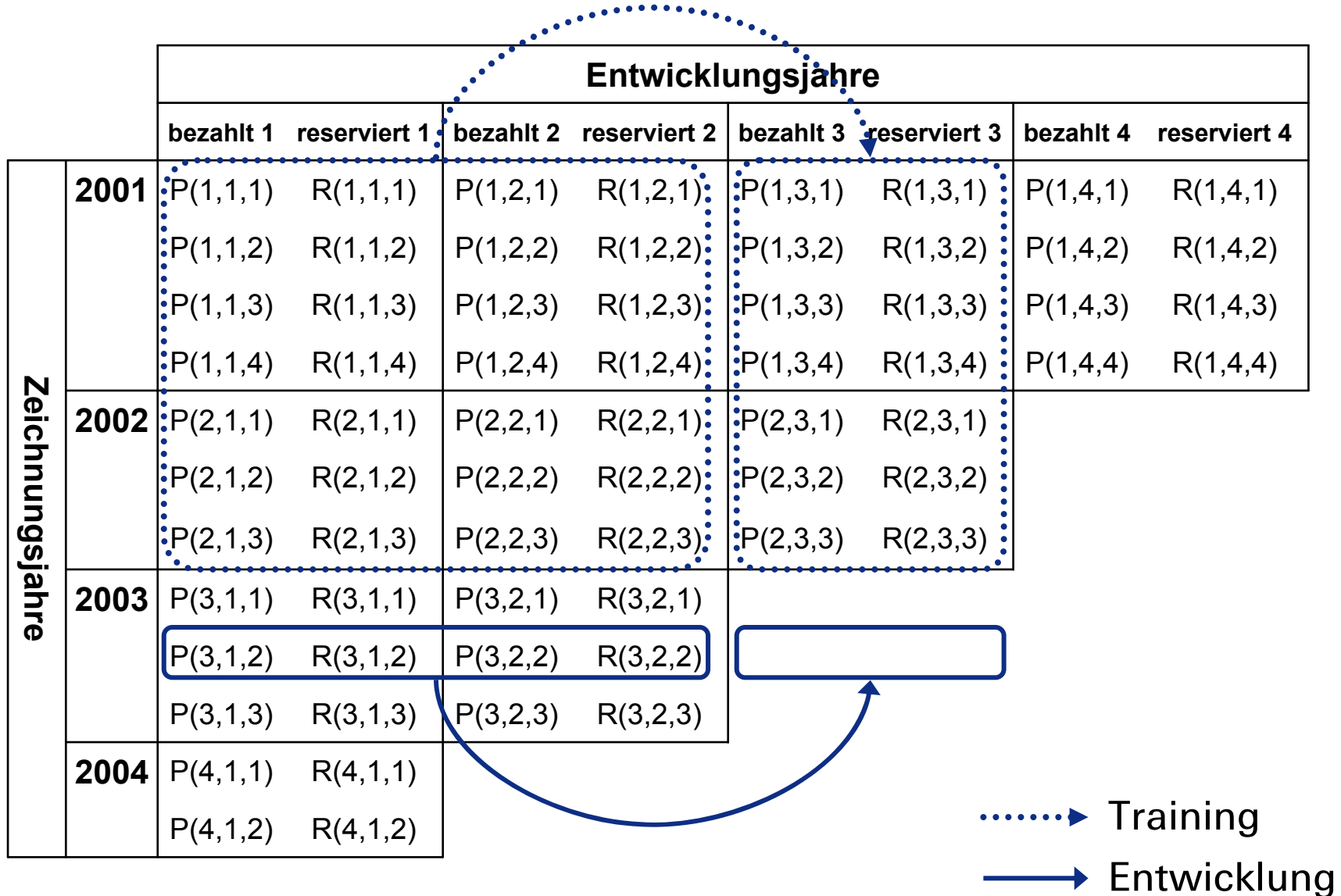
Prinzip

		Entwicklungsjahre							
		bezahlt 1	reserviert 1	bezahlt 2	reserviert 2	bezahlt 3	reserviert 3	bezahlt 4	reserviert 4
Zeichnungsjahre	2001	P(1,1,1)	R(1,1,1)	P(1,2,1)	R(1,2,1)	P(1,3,1)	R(1,3,1)	P(1,4,1)	R(1,4,1)
		P(1,1,2)	R(1,1,2)	P(1,2,2)	R(1,2,2)	P(1,3,2)	R(1,3,2)	P(1,4,2)	R(1,4,2)
		P(1,1,3)	R(1,1,3)	P(1,2,3)	R(1,2,3)	P(1,3,3)	R(1,3,3)	P(1,4,3)	R(1,4,3)
		P(1,1,4)	R(1,1,4)	P(1,2,4)	R(1,2,4)	P(1,3,4)	R(1,3,4)	P(1,4,4)	R(1,4,4)
	2002	P(2,1,1)	R(2,1,1)	P(2,2,1)	R(2,2,1)	P(2,3,1)	R(2,3,1)		
		P(2,1,2)	R(2,1,2)	P(2,2,2)	R(2,2,2)	P(2,3,2)	R(2,3,2)		
		P(2,1,3)	R(2,1,3)	P(2,2,3)	R(2,2,3)	P(2,3,3)	R(2,3,3)		
	2003	P(3,1,1)	R(3,1,1)	P(3,2,1)	R(3,2,1)				
		P(3,1,2)	R(3,1,2)	P(3,2,2)	R(3,2,2)				
		P(3,1,3)	R(3,1,3)	P(3,2,3)	R(3,2,3)				
	2004	P(4,1,1)	R(4,1,1)						
		P(4,1,2)	R(4,1,2)						

Ähnlichster vorherigen Schaden
= Referenzschaden

IBNER mit Künstlicher Intelligenz

Prinzip



IBNER mit Künstlicher Intelligenz

Prinzip

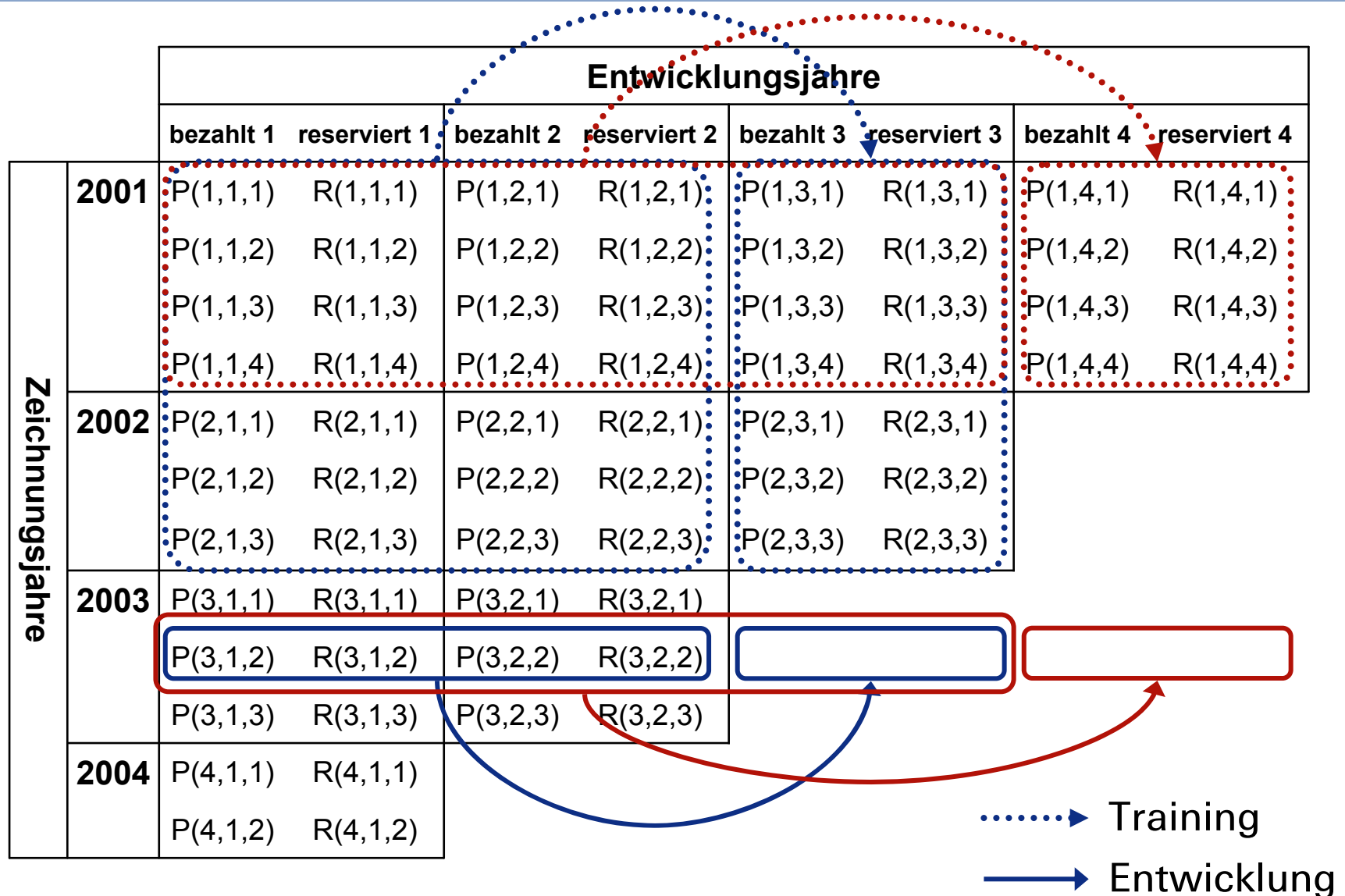
		Entwicklungsjahre							
		bezahlt 1	reserviert 1	bezahlt 2	reserviert 2	bezahlt 3	reserviert 3	bezahlt 4	reserviert 4
Zeichnungsjahre	2001	P(1,1,1)	R(1,1,1)	P(1,2,1)	R(1,2,1)	P(1,3,1)	R(1,3,1)	P(1,4,1)	R(1,4,1)
		P(1,1,2)	R(1,1,2)	P(1,2,2)	R(1,2,2)	P(1,3,2)	R(1,3,2)	P(1,4,2)	R(1,4,2)
		P(1,1,3)	R(1,1,3)	P(1,2,3)	R(1,2,3)	P(1,3,3)	R(1,3,3)	P(1,4,3)	R(1,4,3)
		P(1,1,4)	R(1,1,4)	P(1,2,4)	R(1,2,4)	P(1,3,4)	R(1,3,4)	P(1,4,4)	R(1,4,4)
	2002	P(2,1,1)	R(2,1,1)	P(2,2,1)	R(2,2,1)	P(2,3,1)	R(2,3,1)		
		P(2,1,2)	R(2,1,2)	P(2,2,2)	R(2,2,2)	P(2,3,2)	R(2,3,2)		
		P(2,1,3)	R(2,1,3)	P(2,2,3)	R(2,2,3)	P(2,3,3)	R(2,3,3)		
	2003	P(3,1,1)	R(3,1,1)	P(3,2,1)	R(3,2,1)				
		P(3,1,2)	R(3,1,2)	P(3,2,2)	R(3,2,2)				
		P(3,1,3)	R(3,1,3)	P(3,2,3)	R(3,2,3)				
	2004	P(4,1,1)	R(4,1,1)						
		P(4,1,2)	R(4,1,2)						

..... → Training

————— → Entwicklung

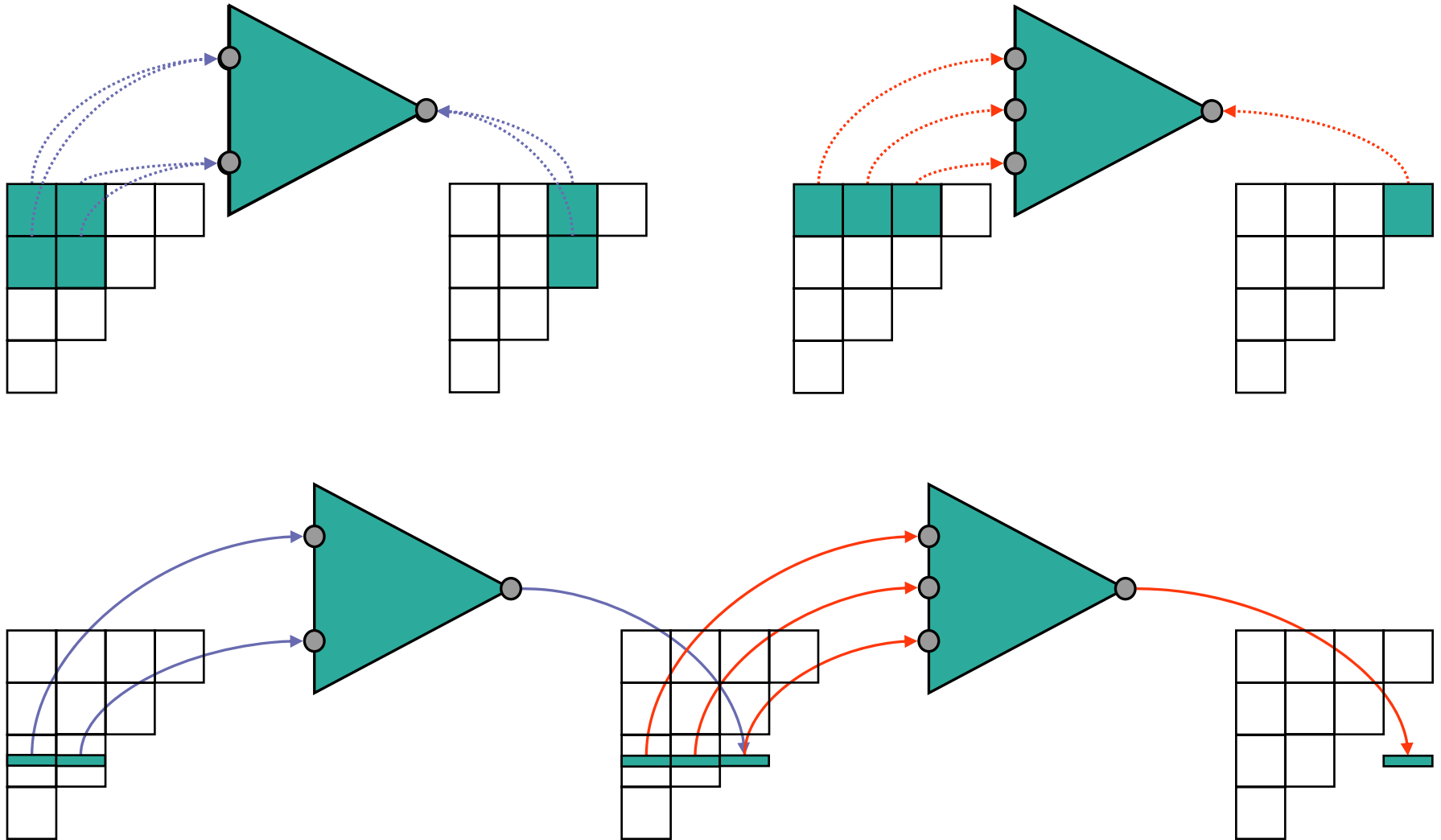
IBNER mit Künstlicher Intelligenz

Prinzip



IBNER mit Künstlicher Intelligenz

Prinzip





- Vollständige Information kann berücksichtigt werden
- Schäden können anhand Industriedaten entwickelt werden
- Nachdem das neuronale Netzwerk trainiert wurde, ist der Algorithmus sehr schnell
- Varianz-/Fehlerschätzung mit den Residuen ermittelt



- “Black box” Vorurteil gegen neuronale Netzwerke

[Cuypers \(2006\)](#)

[System and method for automated establishment of experience ratings and/or risk reserves](#)

[EP1530780](#)

Warum Rückversicherung?

Proportionale Rückversicherung

Nicht-proportionale Rückversicherung

- Daten Diagnosen
 - Datenbearbeitung
 - Systematische Fehler

 - Per risk & event
 - Clash

 - Interne Kosten
 - Kapitalkosten & Loading Prinzipien

 - Exposure Tarifierung
 - Naturkatastrophen
- Fiese Klauseln

 - Fakultative Rückversicherung

 - Claims made

 - Verschachtelte Strukturen
 - Hybride Strukturen

 - Alternatives Risiko Transfer
 - Finite Rückversicherung

 - u.v.m. ...

Koordinaten des Dozenten

Frank Cuypers

+41-44-249-2106

fcuypers@kpmg.com